Rozwiązania zadań (etap drużynowy)

Zadanie 1. Trzy rozwiązania równania

Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie
$\big||x| - m| - 1\big| = 2014$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

Odpowiedź. $m = 2015$. Jeśli liczba x jest rozwiązaniem równania, to liczba $-x$ również. Liczba $x = 0$ musi spełniać to równanie, bo liczba rozwiązań ma być nieparzysta. Zatem $\big||m| - 1\big| = 2014$, z czego wynika, że $m = 2015$ lub $m = -2015$. Dla $m = 2015$ równanie ma trzy rozwiązania, a dla $m = -2015$ tylko jedno.

Zadanie 2. Suma odwrotności

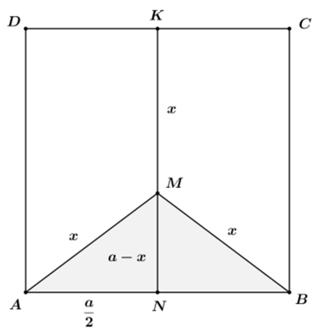
Dwie różne liczby a i b spełniają warunek $\frac{a}{b} + a = \frac{b}{a} + b$. Oblicz $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Rozwiązanie Równość możemy zapisać w postaci $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = b - a$. Po przekształceniach otrzymamy $\frac{a^2-b^2}{ab} = b - a$, a następnie $\frac{(a-b)(a+b)}{ab} = b - a$. Zatem $\frac{a+b}{ab} = -1$, czyli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -1$.

Zadanie 3. Trójkąt w kwadracie

W kwadracie ABCD punkt M jest jednakowo oddalony od wierzchołków A i B, i boku CD. Oblicz jaką część pola kwadratu stanowi pole trójkąta ABM.

Rozwiązanie



Długość boku kwadratu oznaczmy przez a, natomiast odległość punktu M od wierzchołka A jako x. Wysokość trójkąta ABM jest równa $(a - x)$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AMN mamy: $x^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2ax + x^2$. Stąd otrzymamy, że $x = \frac{5}{8}a$ oraz $MN = \frac{3}{8}a$. Zatem pole trójkąta ABM jest równe $\frac{3}{16}a^2$. Pole tego trójkąta stanowi więc $\frac{3}{16}$ pola kwadratu.

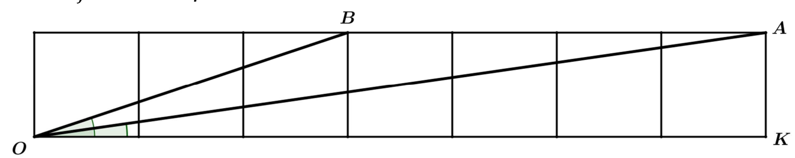
Zadanie 4. Trzynastka

Wyznacz wszystkie liczby naturalne dodatnie, które są 13 razy większe od sumy swoich cyfr.

Rozwiązanie. Szukane liczby nie są jednocyfrowe. Gdyby liczba była dwucyfrowa (czyli postaci $x = 10a + b$), to $10a + b = 13(a + b)$, co jest niemożlwie, gdyż równanie $3a + 12b = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb jednocyfrowych. Gdyby liczba była trzycyfrowa ($x = 100a + 10b + c$), to $100a + 10b + c = 13(a + b + c)$. Stąd $87a = 3b + 12c$, czyli $29a = b + 4c$. Cyfra a musi być równa 1, gdyż liczby b, c nie mogą przekroczyć 9. Jedyne rozwiązania równania $29 = b + 4c$, to $b = 1, c = 7$ lub $b = 5, c = 6$ lub $b = 9, c = 5$. Gdyby liczba miała 4 cyfry, to suma cyfr wynosiłaby co najwyżej 36, natomiast $36 \cdot 13 < 1000$. Analogicznie dla liczb o większej liczbie cyfr. Zatem jedyne szukane liczby to: $117, 156, 195$.

Zadanie 5. Siedem kwadratów

Prostokąt składa się z siedmiu kwadratów. Niech $\sphericalangle KOA = \alpha$, $\sphericalangle KOB = \beta$. Udowodnij, że $\alpha + 2\beta = 45^o$.



Rozwiązanie Wystarczy spojrzeć na rysunek.