

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas II i III szkół średnich)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2023/24**

**Zadanie 1. Siedem ułamków**

Czy istnieje siedem różnych ułamków właściwych nieskracalnych, których mianowniki są liczbami należącymi do zbioru  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  i których suma jest równa 4? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 2. Król na szachownicy**

Król stoi na szachownicy na polu  $a1$  i chce dotrzeć do pola  $h8$  poruszając się w prawo, do góry lub prawo-góra (na skos). Na ile sposobów król może pokonać tę drogę? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 3. Iloczyn liczb**

Udowodnij, że liczba  $r = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2024}}\right)$  jest mniejsza od  $\frac{1}{2024}$ .

**Zadanie 4. Suma liczb**

Czy liczbę 2024 można przedstawić w postaci sumy przynajmniej dwóch kolejnych liczb naturalnych? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 5. Pole trapezu**

Dany jest trapez  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ . Długość ramienia  $AD$  wynosi  $m$ , zaś odległość środka ramienia  $BC$  od prostej  $AD$  jest równa  $n$ . Oblicz pole trapezu.

**Zadanie 6. Cztery równania kwadratowe**

Różne liczby  $a, b$  i  $c$  spełniają dwa warunki:

(i) równania  $x^2 + ax + 1 = 0$ ,  $x^2 + bx + c = 0$  mają wspólny pierwiastek,

(ii) równania  $x^2 + x + a = 0$ ,  $x^2 + cx + b = 0$  mają wspólny pierwiastek.

Oblicz sumę  $a + b + c$ .

**Zadanie 7. Trójka liczb całkowitych**

Wyznacz wszystkie trójki  $(a, b, c)$  liczb całkowitych, różnych od 0 takie, że  $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = (1 + a)(1 + b)(1 + c)$ .

**Zadanie 8. Dwie średnice**

Niech  $AB$  i  $CD$  będą dwiema różnymi średnicami okręgu o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $r$ . Punkt  $M$  leży na okręgu, a punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi punktu  $M$  na średnice  $AB$  i  $CD$ . Udowodnij, że długość odcinka  $PQ$  nie zależy od wyboru punktu  $M$ .

**Zadanie 9. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny**

Jaką najmniejszą liczbę różnych liczb całkowitych należy wziąć, aby wśród nich pewnych pięć liczb tworzyło ciąg geometryczny i pewnych pięć liczb tworzyło ciąg arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 10. Wielomian o współczynnikach całkowitych**

Dany jest wielomian  $W(x)$  o współczynnikach całkowitych, który dla trzech różnych argumentów całkowitych przyjmuje wartość 2024. Udowodnij, że nie istnieje liczba całkowita  $d$ , dla której  $W(d) = 2025$ .

**Zadanie 11. Dwa równania i cztery niewiadome**

Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} xy - t^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 50 \end{cases}$$

**Zadanie 12. Trójkąt równoramienny**

Punkt  $D$  leży na podstawie  $AB$  równoramiennego rozwartokątnego trójkąta  $ABC$  tak, że odcinek  $AD$  ma długość równą promieniowi okręgu opisanego na trójkącie  $BCD$ . Wyznacz miarę kąta  $ACD$ .

-----  
Rozwiązania tych zadań sprawdzają nauczycieli matematyki oceniając każde w skali od 0 do 5 punktów. Wyniki prac należy przesyłać do dnia 18 marca 2024 rok na adres:

**X Liceum Ogólnokształcące im. prof. Stefana Banacha**  
**87-100 Toruń, plac św. Katarzyny 9**  
**tel. (0-56) 622-27-33**

lub na:

**e-mail: tmaslow@onet.eu**

Zgłoszenie powinno zawierać imię, nazwisko ucznia, klasę i typ szkoły, punktację za każde zadanie oraz imię i nazwisko nauczyciela. Z każdej szkoły, której uczniowie przysłały rozwiązania zadań, automatycznie do finału zapraszamy trzech najlepszych uczniów pod warunkiem, że uzyskali oni, co najmniej połowę punktów możliwych do zdobycia. Pozostałymi finalistami zostają uczniowie, którzy zdobyli największą liczbę punktów w grupie wszystkich, którzy przysłali rozwiązania. Każda szkoła może być reprezentowana przez co najwyżej 15 uczniów. Finał wojewódzki dla około 100 autorów najlepszych prac odbędzie się w piątek 5 kwietnia 2024 roku w X LO w Toruniu.