

WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY

im. prof. Stefana Banacha

Zawody indywidualne

TORUŃ, 27 marca 2015 roku

Czas rozwiązywania: 180 minut

Zadanie 1. Bolek i Lolek

Bolek dodaje ułamki (dodatnie) bezbłędnie, natomiast Lolek dodając ułamki w liczniku pisze sumę liczników, a w mianowniku sumę mianowników. Nauczyciel poprosił chłopców o dodanie trzech ułamków. Bolek otrzymał prawidłową sumę równą 1. Czy Lolek mógł otrzymać sumę mniejszą od $\frac{1}{100}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 2. Równanie

Wyznacz wszystkie liczby całkowite x, y takie, że $4x + (x + 1)^2 = y^2$.

Zadanie 3. Suma stu liczb

Wyznacz sto takich liczb, aby ich suma była równa 2015, a ich największy wspólny dzielnik był największy z możliwych.

Zadanie 4. Nierówność

Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b spełniona jest nierówność

$$(1 + a)^4 (1 + b)^4 \geq 64ab(a + b)^2$$

Zadanie 5. Prostokąt i dwie proste

W prostokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem boku CD . Przez punkt C poprowadzono prostą prostopadłą do prostej BM , a przez punkt M prostą prostopadłą do przekątnej BD . Udowodnij, że obie proste przecinają się w punkcie należącym do prostej AD .