

WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY
im. prof. Stefana Banacha
(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)
Zadania I etapu na rok szkolny 2018/19

Zadanie 1. Podzielność przez 9

Ile jest liczb naturalnych dodatnich n nie większych od 2019, dla których liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 2. Układ równań

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases}$$

Zadanie 3. Liczby wymierne

Wyznacz wszystkie liczby x , dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

Zadanie 4. Liczby ośmiocyfrowe

Niech A oznacza najmniejszą, a B największą, ze wszystkich ośmiocyfrowych liczb podzielnych przez 137, w zapisie których występuje każda z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Udowodnij, że liczba $A + B$ jest podzielna przez 73.

Zadanie 5. Suma cyfr

Oblicz sumę cyfr wszystkich liczb czterocyfrowych, które są podzielne przez 3, ale w których żadna z cyfr nie jest podzielna przez 3.

Zadanie 6. Kartka papieru i kwadrat

Uzasadnij, że składając kartkę papieru o wymiarach 1×118 można otrzymać kwadrat o wymiarach 10×10 .

Zadanie 7. Prostokąt i dwa trójkąty równoboczne

W prostokącie $ABCD$ punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD tak, aby trójkąt AEF był równoboczny. Niech M będzie środkiem odcinka AF . Udowodnij, że trójkąt BCM jest równoboczny.

Zadanie 8. Wspólny pierwiastek

Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których trójmiany kwadratowe $y = x^2 + px + 2018$, $y = x^2 + x + 2018p$ mają wspólny pierwiastek.

WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY
im. prof. Stefana Banacha
(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)
Zadania I etapu na rok szkolny 2018/19

Zadanie 9. Nierówność

Udowodnij, że dla liczb dodatnich x, y prawdziwa nierówność:

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

Zadanie 10. Równość i trójkąt

Czy istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c spełniających warunek

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)(b+c)(c+a) ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11. Co jest większe?

Która z liczb jest większa: $\underbrace{\sqrt{7\sqrt{5\sqrt{7\sqrt{5\sqrt{7}}}}}}_{2019 \text{ znaków pierwiastków}}$ czy $7 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12. Dwie funkcje

Niech $f(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ oraz $g(x) = x^3 + cx^2 + x + d$ będą różnymi funkcjami. Wiedząc, że $f(2018) + f(2019) = g(2018) + g(2019)$ rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$.

Rozwiązania zadań sprawdzają nauczyciele matematyki oceniając każde w skali od 0 do 5 punktów. Zestawienie wyników z punktacją za każde zadanie prosimy o przesłanie na adres:

Zespół Szkół nr 10 im. prof. Stefana Banacha
87-100 Toruń, plac św. Katarzyny 9
tel. (0-56) 622-27-33

lub na:

e-mail: tmaslow@onet.eu

do dnia 5 marca 2019 roku. Finał wojewódzki dla około 100 autorów najlepszych prac odbędzie się 29, 30 marca 2019 roku w Zespole Szkół nr 10 w Toruniu. W trakcie tych dni odbędą się zawody indywidualne (w piątek) i zespołowe (w sobotę). W zawodach zespołowych uczestniczą szkoły, które mogą wyłonić (spośród zakwalifikowanych do drugiego etapu) 3-osobową drużynę. Każda szkoła może być reprezentowana przez co najwyżej dwie drużyny oraz co najwyżej dziesięciu uczniów.