Część indywidualna

Zadanie 1. Układ równań Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x(y+z)=35 \\ y(x+z)=32 \\ z(x+y)=27 \end{cases}$.

Rozwiązanie. Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $z(x-y)=3$. Dodając otrzymane równanie do trzeciego równania mamy $zx=15$. Stąd $xy=20$ i $zy=12$. Mnożąc ostatnie trzy równania stronami otrzymujemy $(xyz)^2=3600$, a stąd $xyz=60$ lub $xyz=-60$. Otrzymujemy, zatem dwie trójki rozwiązań: $(5,4,3)$ oraz $(-5,-4,-3)$.

Zadanie 2. Siedmiu grzybiarzy

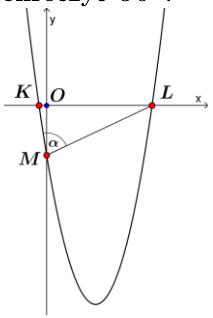
Siedmiu grzybiarzy zebrało łącznie 100 grzybów, przy czym każdy z nich zebrał inną liczbę grzybów. Wykaż, że jest między nimi trzech grzybiarzy, którzy zebrali w sumie co najmniej 50 grzybów.

Rozwiązanie. Niech $n_1 > n_2 > \ldots > n_7$ będą liczbami grzybów zebranych przez grzybiarzy. Jeśli $n_3 \geq 16$, to $n_2 \geq 17$ i $n_1 \geq 18$, więc $n_1+n_2+n_3 > 50$. Jeśli $n_3 \leq 15$, to $n_4 \leq 14$, $n_5 \leq 13$, $n_6 \leq 12$, $n_7 \leq 11$, więc $n_4+n_5+n_6+n_7 \leq 50$. Zatem $n_1+n_2+n_3 \geq 50$.

Zadanie 3. Funkcja kwadratowa i kąt

Wykres funkcji kwadratowej o współczynnikach całkowitych przecina oś odciętych w punktach K i L, a oś rzędnych w punkcie M. Jaką największą miarę może mieć kąt LMK? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. 90^o - kąt ten spełnia np. funkcja $y=x^2-1$. Uzasadnimy, że miara kąta LMK nie może przekroczyć 90^o.



Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami trójmianu kwadratowego $y=ax^2+bx+c$. Gdyby, kąt LMK był rozwarty, to $OM^2 < OK \cdot OL$, (gdy kąt LMK był prosty wtedy mamy równość). Zatem $c^2 < |x_1 x_2|$. Ze wzorów Viete'a $|x_1 x_2| = \left|\frac{c}{a}\right|$, zatem $c^2 < \left|\frac{c}{a}\right|$. Stąd $0 < |ac| < 1$, co przeczy temu, że liczby a, c są liczbami całkowitymi.

Zadanie 4. Trójkąt

Czy istnieje trójkąt o bokach długości x, y, z spełniających warunek $x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(z+x)$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Załóżmy, że $x \geq y \geq z$, zatem $y+z>x$, wtedy

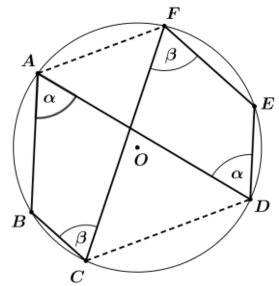
$$(x+y)(y+z)(z+x) > (x+y)(x+z)x = x^3+x^2y+x^2z+xyz >$$
$$x^3+x^2y+x^2z \geq x^3+y^3+z^3$$

Otrzymujemy sprzeczność, zatem taki trójkąt nie istnieje.

Zadanie 5. Sześciokąt

Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Wiadomo, że $AB \parallel DE$ i $BC \parallel EF$. Udowodnij, że $CD \parallel FA$.

Rozwiązanie Poprowadźmy odcinki AD i CF. Z równoległości odpowiednich boków mamy, że $\angle BAD = \angle EDA$ oraz $\angle FCB = \angle CFE$.



Z zależności między kątami wpisanymi i środkowymi otrzymujemy $\angle BOC + \angle COD = \angle EOF + \angle FOA$ oraz $\angle FOA + \angle AOB = \angle COD + \angle DOE$.

Po przekształceniach:

$\angle COD - \angle FOA = \angle EOF - \angle BOC$ oraz $\angle COD - \angle FOA = \angle AOB - \angle DOE$

i porównaniu prawych stron równości otrzymamy:

$\angle EOF - \angle BOC = \angle AOB - \angle DOE$.

Przekształcając do postaci: $\angle DOE + \angle EOF = \angle AOB + \angle BOC$

oraz korzystając z kątów środkowych i wpisanych otrzymujemy $\angle DAF = \angle ADC$, więc $CD \parallel FA$.