Szkice rozwiązań: część indywidualna

Zadanie 1. Ja i Ty

Ja mam dwa razy więcej lat niż Ty wtedy, kiedy Ja miałem tyle lat co Ty teraz. Wtedy, gdy Ty będziesz miał tyle lat co Ja teraz, to w sumie będziemy mieli 126 lata. Oblicz ile lat ma każdy z nas.

Rozwiązanie:

Ja mam 56 lat, Ty masz 42 lata. Niech a oznacza mój wiek , b twój wiek, wtedy $a = 2\big(b - (a - b)\big)$ oraz $a + \big(a + (a - b)\big) = 126$; stąd $3a = 4b$ oraz $3a - b = 126$.
Zatem $a = 56$ i $b = 42$.

Zadanie 2. Plusy i minusy

Czy w zapisie $2018^2 - 2017^2 - 2016^2 - \cdots - 2^2 - 1^2$ można niektóre minusy zamienić na plusy tak, aby wartość wyrażenia była równa 2019? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Tak. Zauważmy, że $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$, a stąd:
$((n+3)^2 - (n+2)^2) - ((n+1)^2 - n^2) = (2n+5) - (2n+1) = 4$
Dając taki układ znaków w kolejnych czwórkach kwadratów od 2018^2 do 3^2 otrzymujemy $504 \cdot 4$. Dopisując na końcu $+2^2 - 1^2$ mamy
$4 \cdot 504 + 2^2 - 1 = 2019$.

Zadanie 3. Co najmniej jedna jedynka

Wiadomo, że $xyz = 1$ oraz $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 1.

Rozwiązanie:

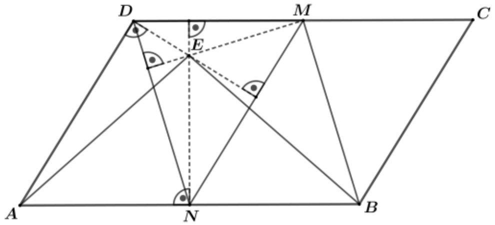
Z założeń wynika, że $x + y + z = xy + yz + zx$. Rozpatrzmy wyrażenie:
$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = 0$,
zatem jedna z liczb x, y, z jest równa 1.

Zadanie 4. Równoległobok

Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ wybrano punkt E taki, że $AE = BE$ oraz $\angle ADE = 90^o$. Punkt M jest środkiem boku CD. Wyznacz miarę kąta EMB.

Rozwiązanie:

Odp. 90^o.



Niech N będzie środkiem boku AB. Trójkąt ABE jest równoramienny oraz $EN \perp AB$. Stąd, że $AD \parallel MN$ i $\angle ADE$ jest kątem prostym otrzymujemy, że $DE \perp MN$. Zatem punkt E jest punktem przecięcia się wysokości trójkąta NMD, stąd $ME \perp DN$. $NBMD$ jest równoległobokiem zatem $DN \parallel BM$, stąd $\angle EMB$ jest kątem prostym.

Zadanie 5. Trójkąt w trójkącie równoramiennym

Udowodnij, że każdy trójkąt o polu 1, można nakryć trójkątem równoramiennym o polu mniejszym od $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech ABC będzie trójkątem $|AB| \geq |AC| \geq |BC|$. Niech CD będzie wysokością trójkąta, punkt A' jest symetryczny do A względem punktu D , natomiast punkt B' jest symetryczny do punktu B względem dwusiecznej kąta A. Trójkąty ACA' jak i ABB' są trójkątami równoramiennymi i każdy z nich nakrywa trójkąt ABC Zauważmy, że:
$\frac{P_{\Delta ACA'}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{AA'}{AB} = \frac{2AD}{AB}$ oraz $\frac{P_{\Delta ABB'}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{AB'}{AC} = \frac{AB}{AC}$.
Iloczyn tych stosunków jest równy $\frac{2AD}{AC} < 2$.
Co oznacza, że jeden z tych stosunków jest mniejszy od $\sqrt{2}$.