Szkice rozwiązań - część drużynowa

Zadanie 1. Największa wartość

Liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $a^2 + b^2 = 1$. Wyznacz największą możliwą wartość wyrażenia $|a+b| + |a-b|$.

Rozwiązanie: $(|a+b| + |a-b|)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2 \cdot |a^2 - b^2| \le 4$. Stąd np. dla $a = 1, b = 0$ otrzymujemy maksimum równe 2.

Zadanie 2. Pięć liczb

Czy istnieje pięć liczb całkowitych takich, że wszystkie sumy, utworzone z dwóch dowolnych liczb wybranych spośród nich, są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Załóżmy, że istnieje takich pięć liczb, a ich sumy (składające się z dwóch składników) są kolejnymi liczbami całkowitymi: $m, m+1, m+2, \ldots, m+9$ (takich sum jest dziesięć). Każda z pięciu liczb występuje dokładnie w czterech składnikach, a zatem suma liczb $m + (m+1) + (m+2) + \ldots + (m+9)$ jest podzielna przez 4. Z drugiej strony mamy $m + (m+1) + (m+2) + \ldots + (m+9) = 10m + 45$, czyli suma nie jest podzielna przez 4. Zatem takie liczby nie istnieją.

Zadanie 3. Liczby dwucyfrowe

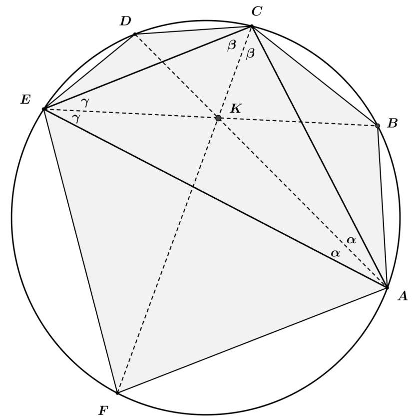
Ile najwięcej różnych liczb dwucyfrowych można zapisać w rzędzie tak, aby każde dwie sąsiednie nie były względnie pierwsze, a każde dwie nie sąsiadujące ze sobą były względnie pierwsze? Odpowiedź swoją uzasadnij.

Rozwiązanie: Takich liczb maksymalnie może być 10 np.: 11, 77, 91, 65, 85, 51, 57, 38, 46, 23. Załóżmy, że takich liczb jest 11. Dla każdej pary sąsiednich liczb wypiszmy ich największy wspólny dzielnik. Otrzymamy 10 liczb względnie pierwszych. Wszystkie te liczby są jedno albo dwucyfrowe. Liczb jednocyfrowych jest nie więcej niż cztery, zatem liczb dwucyfrowych jest co najmniej sześć. Z tego wynika, że dwie liczby dwucyfrowe muszą stać obok siebie. Są one względnie pierwsze, więc są podzielne przez ich iloczyn. Żadna liczba dwucyfrowa nie może być iloczynem dwóch liczb dwucyfrowych.

Zadanie 4. Sześciokąt wpisany w okrąg

W sześciokącie $ABCDEF$ wpisanym w okrąg zachodzą równości: $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Udowodnij, że przekątne AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: $|CD| = |DE|$, więc miary kątów $\angle CAD$ i $\angle DAE$ są równe. Zatem AD zawiera się w dwusiecznej kąta A trójkąta ACE. Analogicznie BE zawiera się w dwusiecznej kąta E, natomiast CF w dwusiecznej kąta C tego trójkąta. Dwusieczne trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Zadanie 5. Pięć odcinków i trójkąt

Długości pięciu odcinków są równe a, b, c, d, e O tych liczbach wiadomo, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$. Udowodnij, że wśród tych pięciu odcinków można znaleźć trzy, z których nie można zbudować trójkąta.

Rozwiązanie: Załóżmy, że z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt. Wtedy prawdziwe są nierówności $a < b + c$, $b < c + d$, $c < d + e$, $d < e + a$, $e < a + b$. Mnożąc je odpowiednio przez liczby a, b, c, d, e otrzymujemy: $a^2 < ab + ac$, $b^2 < bc + bd$, $c^2 < cd + ce$, $d^2 < de + ad$, $e^2 < ae + be$. Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymamy nierówność

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 < ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$, która daje nam sprzeczność.